Gleitende Durchschnitte

1. Simple Moving Average

gegeben sei folgende Zeitreihe:

t	1	2	3	4	5	6
Kurs	2	3	4	6	10	15
SMA	-	-	-	-	5	7.6

Der SMA ist das arithmetische Mittel der letzten n - Kurse

$$SMA_5 = \frac{2+3+4+6+10}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$SMA_6 = \frac{3+4+6+10+15}{5} = \frac{38}{5} = 7{,}6$$

Gewichtungsfaktoren:

Wenn wir uns SMA_5 ansehen, können wir mit den Regeln der Bruchrechnung

auch schreiben:

$$SMA_5 = \frac{2+3+4+6+10}{5}$$

$$SMA_5 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} + \frac{10}{5}$$

$$SMA_5 = \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 6 + \frac{1}{5} \cdot 10$$

mit dem Gewichtungsfaktor w_i = konstant = $\frac{1}{5}$ ergibt sich:

$$SMA_5 = w_5\, 2 + w_4\, 3 + w_3\, 4 + w_2\, 6 + w_1\, 10$$

Durch die Normierung auf n ergibt sich eine wichtige Erkenntnis, die wir später noch benötigen, und hier noch leicht einsehbar ist:

Die Summe aller normierten Gewichtungsfaktoren ist 1

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} w_k = 1}$$

BSP für n = 5

$$\sum_{k=1}^{5} w_k = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

$$= 1$$

Formel für SMA allgemein:

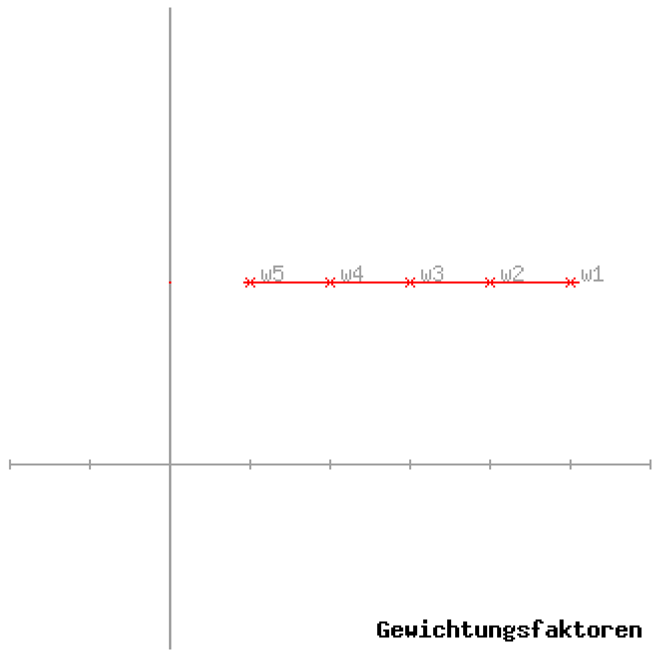
$$SMA_t = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_{t-k+1}$$

BSP für n = 5

$$SMA_t = \frac{1}{5} \cdot \sum_{k=1}^{5} X_{t-k+1}$$

$$SMA_t = \frac{1}{5} \cdot \left(X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3} + X_{t-4} \right)$$

Gewichte des SMA



2. Weighted Moving Average

gegeben sei folgende Zeitreihe:

t	1	2	3	4	5	6
Kurs	2	3	4	6	10	15
SMA	-	-	-	-	5	7.6
WMA	-	-	-	-	6.53	9.6

Der WMA ist das **linear** abnehmend gewichtete Mittel der letzten n - Kurse. Wobei der letzte Kurs am stärksten gewichtet ist. Es wird jeder Kurs mit seinem Gewicht multipliziert und am Ende mit der Gesamtsumme der Gewichte dividiert.

für n = 5 wird mit 5 - 4 - 3 - 2 - 1 gewichtet

$$WMA_5 = \frac{5 \cdot \mathbf{10} + 4 \cdot \mathbf{6} + 3 \cdot \mathbf{4} + 2 \cdot \mathbf{3} + 1 \cdot \mathbf{2}}{15} = \frac{98}{15} = 6{,}53$$

$$WMA_6 = \frac{5 \cdot \mathbf{15} + 4 \cdot \mathbf{10} + 3 \cdot \mathbf{6} + 2 \cdot \mathbf{4} + 1 \cdot \mathbf{3}}{15} = \frac{144}{15} = 9{,}6$$

Gewichtungsfaktoren des WMA:

Wenn wir uns WMA_5 ansehen, können wir mit den Regeln der Bruchrechnung schreiben:

$$WMA_5 = \frac{5 \cdot \mathbf{10} + 4 \cdot \mathbf{6} + 3 \cdot \mathbf{4} + 2 \cdot \mathbf{3} + 1 \cdot \mathbf{2}}{15}$$

$$WMA_5 = \frac{5 \cdot \mathbf{10}}{15} + \frac{4 \cdot \mathbf{6}}{15} + \frac{3 \cdot \mathbf{4}}{15} + \frac{2 \cdot \mathbf{3}}{15} + \frac{1 \cdot \mathbf{2}}{15}$$

$$WMA_5 = \frac{5}{15} \cdot \mathbf{10} + \frac{4}{15} \cdot \mathbf{6} + \frac{3}{15} \cdot \mathbf{4} + \frac{2}{15} \cdot \mathbf{3} + \frac{1}{15} \cdot \mathbf{2}$$

$$WMA_5 = 0{,}33 \cdot \mathbf{10} + 0{,}26 \cdot \mathbf{6} + 0{,}2 \cdot \mathbf{4} + 0{,}13 \cdot \mathbf{3} + 0{,}066 \cdot \mathbf{2}$$

mit dem Gewichtungsfaktor w_i ergibt sich:

$$WMA_5 = w_5\ 10 + w_4\ 6 + w_3\ 4 + w_2\ 3 + w_1\ 2$$

Durch die Normierung auf Summe der Gewichtungsfaktoren ergibt sich auch beim WMA wieder die Erkenntnis:

Die Summe aller normierten Gewichtungsfaktoren ist 1

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$$

BSP für n = 5

$$\sum_{k=1}^{5} w_k = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{15}{15} = \mathbf{1}$$

Formel für WMA allgemein:

$$SMA_t = \sum_{k=1}^{n} (n - k + 1) \cdot X_{t-k+1}$$

BSP für n = 5

$$SMA_t = \sum_{k=1}^{5} (5 - k + 1) \cdot X_{t-k+1}$$

$$SMA_t = 5 \cdot X_t + 4 \cdot X_{t-1} + 3 \cdot X_{t-2} + 2 \cdot X_{t-3} + 1 \cdot X_{t-4}$$

Gewichte des WMA

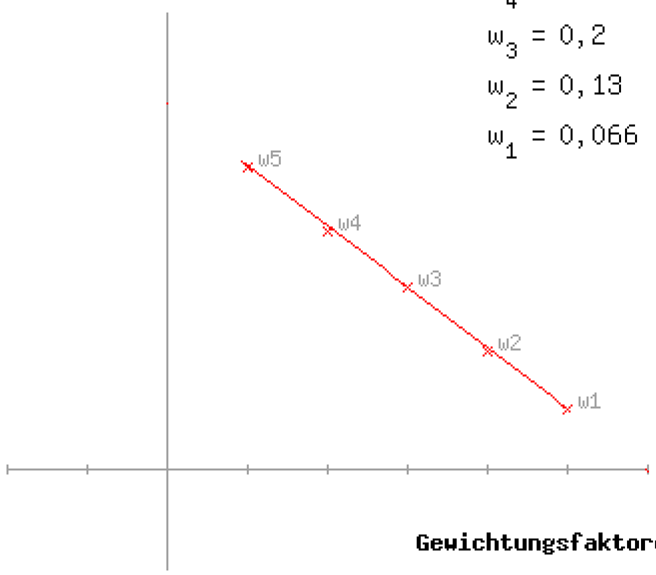
$w_5 = 0,33$

$w_4 = 0,26$

$w_3 = 0,2$

$w_2 = 0,13$

$w_1 = 0,066$



Gewichtungsfaktoren

3. Exponential Moving Average

gegeben sei folgende Zeitreihe:

t	1	2	3	4	5	6
Kurs	2	3	4	6	10	15
SMA	-	-	-	-	5	7.6
WMA	-	-	-	-	6.5	9.6
EMA	-	-	-	-	6.6	9.7

Der Exponential Moving Average, auch genannt EMA, ist das **prozentual** abnehmend gewichtete Mittel **aller** Kurse.
Wobei der letzte Kurs am stärksten gewichtet ist.

Es wird jeder Kurs mit seinem Gewicht multipliziert und am Ende mit der Gesamtsumme der Gewichte dividiert.
Beim EMA fließen theoretisch alle bisherigen historischen Kurse in die Berechnung ein.
Da der Gewichtungsfaktor aber sehr schnell gegen Null strebt, verlieren die älteren Kurse schnell ihre Bedeutung.

Wir nehmen eine Abnahme der Gewichte um jeweils 34 Prozent an.
(Diese Zahl ist jetz erstmal rein willkührlich gewählt)
...na gut, nicht ganz. .. aber dazu später mehr.

Für das letzte Element benutzen wir das Gewicht 100.
Daraus folgen die weiteren Gewichte, indem wir sie jeweils um 34 Prozent reduzieren
Wir multiplizieren also jeweils den Gewichtungsparameter mit 0,66 um den nächsten zu erhalten.

$w_5 = 100$ $\quad w_2 = 28,8$
$w_4 = 66$ $\quad w_1 = 19,0$
$w_3 = 43,6$

Wir berechnen nun den EMA_5

$$EMA_5 = \frac{(100 \cdot \mathbf{10} + 66 \cdot \mathbf{6} + 43,6 \cdot \mathbf{4} + 28,8 \cdot \mathbf{3} + 19,0 \cdot \mathbf{2})}{257,4} = \frac{1694,4}{257,4} = 6,6$$

um EMA_6 zu berechnen, benötigen wir für 6 Kurse 6 Gewichtungsparameter.

$w_6 = 100$ $\quad w_3 = 28,8$
$w_5 = 66$ $\quad w_2 = 19,0$
$w_4 = 43,6$ $\quad w_1 = 12,5$

$$EMA_6 = \frac{(100 \cdot \mathbf{15} + 66 \cdot \mathbf{10} + 43,6 \cdot \mathbf{6} + 28,8 \cdot \mathbf{4} + 19,0 \cdot \mathbf{3} + 12,5 \cdot \mathbf{2})}{269,9}$$

$$EMA_6 = \frac{2618,8}{269,9} = 9,7$$

Die Gewichtungsfaktoren des EMA

Auch hier sehen wir am Beispiel EMA_5, dass die Summe der Gewichtungsfaktoren wieder 1 ergibt.

$$EMA_5 = \frac{(100 \cdot \mathbf{10} + 66 \cdot \mathbf{6} + 43{,}6 \cdot \mathbf{4} + 28{,}8 \cdot \mathbf{3} + 19{,}0 \cdot \mathbf{2})}{257{,}4}$$

$$EMA_5 = \frac{100}{257{,}4} \cdot \mathbf{10} + \frac{66}{257{,}4} \cdot \mathbf{6} + \frac{43{,}6}{257{,}4} \cdot \mathbf{4} + \frac{28{,}8}{257{,}4} \cdot \mathbf{3} + \frac{19{,}0}{257{,}4} \cdot \mathbf{2}$$

$$EMA_5 = 0{,}39 \cdot \mathbf{10} + 0{,}26 \cdot \mathbf{6} + 0{,}16 \cdot \mathbf{4} + 0{,}11 \cdot \mathbf{3} + 0{,}07 \cdot \mathbf{2}$$

mit dem allgemeinen Gewichtungsfaktor w_i ergibt sich:

$$EMA_5 = w_5\ 10 + w_4\ 6 + w_3\ 4 + w_2\ 3 + w_1\ 2$$

Die Summe aller normierten Gewichtungsfaktoren ist 1

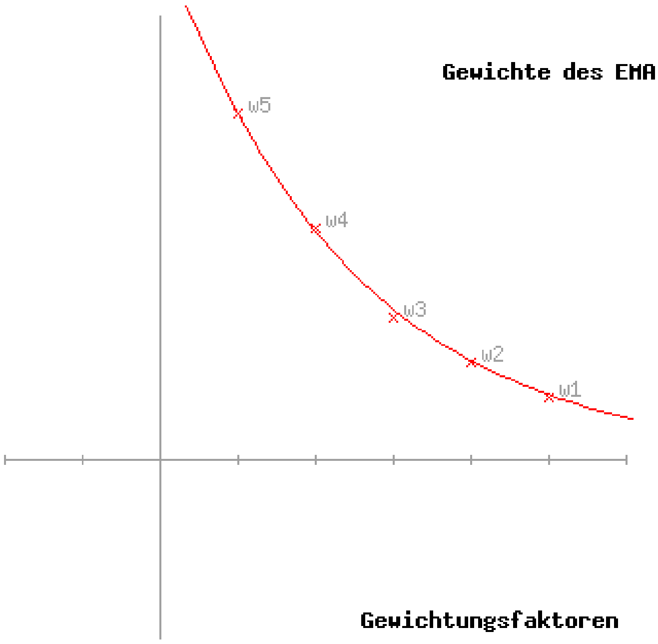
$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$$

für das obige Beispiel

BSP für n = 5

$$\sum_{k=1}^{5} w_k = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

$$= 0{,}07 + 0{,}11 + 0{,}16 + 0{,}26 + 0{,}39 = 1$$



Exponential Moving Average - rekursive Berechnung

Für eine **genügend** große Anzahl von Kursen kann man den EMA auch rekursiv berechnen.
Dies Formel wollen wir jetzt herleiten.
In dem Beispiel wird schon bei 15 Kursen der letzte Gewichtungsparameter mit 0,3 unbedeutend klein.
Da man in unserem Fall den Startwert 100 immer mit 0,66 multilplizieren würde, kann man also den Gewichtungsparameter des ältesten Kurses berechnen.

Zur Vereinfachung drehen wir jetzt mal die Nummerierung der Gewichtungsparameter um.
w_1 soll der aktuellste Gewichtungsparameter sein.

$$w_1 = 100 \qquad = 100 \cdot 0{,}66^{0}$$

$$w_2 = 100 \cdot 0{,}66 \qquad = 100 \cdot 0{,}66^{1}$$

$$w_3 = 100 \cdot 0{,}66 \cdot 0{,}66 \qquad = 100 \cdot 0{,}66^{2}$$

.
.
.

$$w_{15} \qquad = 100 \cdot 0{,}66^{15-1}$$

Bei den Gewichtungsparametern handelt es sich um eine Folge von Zahlen.

100 - 66 - 43,6 - 28,8 - 19 - 12,5 - 8,27 - 5,5 - 3,6 ..

Die Zahlenfolge hat ein paar besondere Eigenschaften.

1. Die Zahlen unterscheiden sich jeweils um einen Faktor von 0,66

2. Die Gesamtsumme all dieser Zahlen wird nie größer als eine bestimmte Zahl

Es handelt sich hier um eine sogenannte **geometrische** Zahlenfolge mit $q = 0{,}66$

Ein beliebiges Glied dieser Zahlenfolge berechnet sich mit der Formel:

$$\boxed{w_n = w_1 \cdot q^{n-1}}$$

.

In unseren vorherigen Beispielen haben wir immer die Gewichtungsparameter mit der Gesamtsumme aller Parameter normiert.
Also durch die Gesamtsumme der Gewichtungsparameter dividiert.

Wie erhalten wir nun die Gesamtsumme aller Gewichtungsparameter, wenn doch unendlich viele Kurse in die Berechnung eingehen?
Dafür hat die Mathematik auch eine Lösung.

Die Summe aller Gewichtungsparameter kann ebenso berechnet werden, da sie nie größer wird, als eine bestimmte Zahl.
Der mathematisch nicht so versierte Leser muss diese doch erstaunliche Erkenntnis erst einmal glauben, kann aber die Herleitung der Formel im Anhang selbständig nachvollziehen.

Die Gesamtsumme von n Elementen der Gewichtungsparameter berechnet sich:

$$\boxed{Summe_n = w_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

Beispiel: Summe der 6 Gewichte aus dem Eingangsbeispiel:

$$Summe_6 = 100 \cdot \frac{(1 - 0{,}66^6)}{(1 - 0{,}66)} = 100 \cdot 2{,}69 = 269{,}8$$

Einen Teil der Formel wollen wir uns genauer ansehen.

$$q^n$$

Für $q < 1$ gilt: je größer n wird, destso kleiner wird dieser Teil der Formel.
Er strebt gegen Null.

Schon bei 50 ist der Wert: $0{,}66^{50} = 0{,}00000000095$

Für unendlich viele Glieder wird er zur Null un kann also weggelassen werden.
Es ergibt sich nun die Gesamtsumme :

$$Summe = w_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

In unserem Beispiel wäre die Gesamtsumme:

$$Summe = 100 \cdot \frac{1}{(1 - 0{,}66)} = 100 \cdot 2{,}94 = 294{,}1$$

Jetzt haben wir mit 294,1 die Gesamtsumme der Gewichtungsparameter gefunden.
Nun können wir auch wieder unsere einzelnen Gewichtungsparameter normieren.
Nach diesem Schritt wird Gesamtumme aller Gewichtungsfaktoren wieder eins.
Bei der Berechnung des EMA sparen wir damit die letzte Division durch die komplette Gesamtsumme.

x_1 soll der aktuellste Kurs sein. x_n der ältste Kurs.

$$EMA_n = \frac{100}{294,1} \cdot x_1 + \frac{66}{294,1} \cdot x_2 + \frac{43,6}{294,1} \cdot x_3 + \frac{28,8}{294,1} \cdot x_4 + \frac{19,0}{294,1} \cdot x_5 \ldots$$

$$EMA_n = 0,34 \cdot x_1 + 0,22 \cdot x_2 + 0,15 \cdot x_3 + 0,09 \cdot x_4 + 0,06 \cdot x_5 \ldots$$

Der Startwert des ersten Gewichtungsfaktors ist genau die Prozentzahl, um der wir jeden weiteren Gewichtungsfaktor reduzieren wollen. Nämlich 34 Prozent.

Er ergibt sich aus der obigen Formel.

$$Summe = w_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

$$Summe = \frac{w1}{1 - q}$$

$$w_{1\ neu} = \frac{w_1}{Summe}$$

$$w_{1\ neu} = \frac{w_1}{\frac{w1}{1 - q}}$$

$$w_{1\ neu} = w_1 \cdot \frac{1 - q}{w_1}$$

$$w_{1\ neu} = 1 - q$$

In unserem Beispiel:

$$w_{1\ neu} = 1 - 0,66$$

$$w_{1\ neu} = 0,34$$

Wir können also mit einem beliebigen Gewichtungsfaktor w_1 beginnen.
Der normierte Gewichtungsfaktor ist davon unabhängig und beträgt immer
$w_1 = 1 - q$

Exponential Moving Average - rekursive Berechnung

Wir fassen zusammen:

Wenn wir die Gewichtungsparameter um jeweils 34 Prozent reduzieren wollen.
Und die Summe aller Gewichtungsparameter 1 sein soll, damit wir uns die Division durch die Gesamtsumme sparen können, dann entspricht der Gewichtungsfaktor des aktuellsten Kurses genau dieser Prozentzahl.

Diesen Parameter nennen wir jetzt a

$a = 0{,}34$

Damit berechnet sich q, das ist der Faktor, mit dem wir multiplizieren müssen, um jeweils auf den nächsten Parameter zu kommen:

$q = 1 - 0{,}34$

$q = 0{,}66$

$q = (1 - a)$

Um also den EMA zu berechnen, muss also jeder Kurs mit einem Faktor multipliziert werden, aber mit welchem?

$$EMA = w_1\,\mathbf{x_1} + w_2\,\mathbf{x_2} + w_3\,\mathbf{x_3} + w_4\,\mathbf{x_4} \quad \ldots \quad w_n\,\mathbf{x_n}$$

w_1 ist der Startwert des ersten Gewichtungsfaktors,
und wir haben eben festgelegt, dass w_1 als a definiert wird.

also:

$$\begin{aligned}
w_1 &= a \\
w_2 &= a \cdot q &&= a \cdot q^1 &&= a \cdot (1 - a) \\
w_3 &= a \cdot q \cdot q &&= a \cdot q^2 &&= a \cdot (1 - a)^2 \\
w_4 &= a \cdot q \cdot q \cdot q &&= a \cdot q^3 &&= a \cdot (1 - a)^3
\end{aligned}$$

also ergibt sich:

$$EMA = w_1\,\mathbf{x_1} + w_2\,\mathbf{x_2} + w_3\,\mathbf{x_3} \;..$$

$$EMA = a\,\mathbf{x_1} + a \cdot q\,\mathbf{x_2} + a \cdot q^2\,\mathbf{x_3} \;..$$

$$EMA = a\,\mathbf{x_1} + a\,(1 - a)\,\mathbf{x_2} + a\,(1 - a)^2\,\mathbf{x_3} \;..$$

Ein neuer Kurs

Was geschieht nun, wenn ein neuer Kurs hinzukommt?
Da wir diesmal "falsch" herum indizieren, wird ein neu hinzukommender Kurs mit x_0 bezeichnet.

Wie wird nun der EMA_{neu} berechnet?

Wir nehmen wieder die Formel zur Hand:

$$EMA_{neu} = a\,\mathbf{x_0} + a\,(1-a)\,\mathbf{x_1} + a\,(1-a)^2\,\mathbf{x_2} \quad + a\,(1-a)^3\,\mathbf{x_2} \ \ldots$$

Prinzipiell ist die Struktur zu erkennen:

$$EMA_{neu} = a\,\mathbf{x_0} + Rest$$

Der Rest - Term besteht aus vielen Summanden, und wir können den Faktor (1 - a) ausklammern

$$Rest = a\,(1-a)\,\mathbf{x_1} + a\,(1-a)^2\,\mathbf{x_2} \quad + a\,(1-a)^3\,\mathbf{x_2}\ldots$$

$$Rest = (1-a)\left[a\,\mathbf{x_1} + a\,(1-a)^1\,\mathbf{x_2} \quad + a\,(1-a)^2\,\mathbf{x_2}\ldots\right]$$

in der hinteren Klammer entdecken wir den alten EMA, der genauso berechnet wurde (siehe oben)

also:

$$Rest = (1-a)\cdot EMA_{alt}$$

nun fügen wir zusammen:

$$EMA_{neu} = a\,\mathbf{x_0} + Rest$$

$$EMA_{neu} = a\,\mathbf{x_0} + (1-a)\cdot EMA_{alt}$$

Was passiert?

Wir multiplizeren den aktuellsten Kurs mit a

den gesamten Rest multiplizieren wir mit (1 - a)

Mit diesem Schritt passen wir sozusagen alle Gewichtungsparameter in einem Rutsch an.

Jeder Gewichtungsparameter wird in der Multiplikation mit (a - 1) um 34 Prozent reduziert, also auf einen Anteil von 66 Prozent gebracht.

So "schaffen" wir Platz für den neuen Kurs, der eine 34 Prozent Gewichtung findet. Somit bleibt die Summe der Gesamtgewichtung bei 100 Prozent, also 1

Exponential Moving Average – rekursive Berechnung

Wir fassen zusammen: (mit K_{neu} wird der neue Kurs bezeichnet)

$$EMA_{neu} = a \cdot \mathbf{K_{neu}} + (1 - a) \cdot EMA_{alt}$$

Wenn man die Klammer ausmultipliziert:

$$EMA_{neu} = a \cdot \mathbf{K_{neu}} + 1 \cdot EMA_{alt} - a \cdot EMA_{alt}$$

$$EMA_{neu} = a \cdot \mathbf{K_{neu}} - a \cdot EMA_{alt} + EMA_{alt}$$

a ausklammern:

$$EMA_{neu} = a \cdot (\mathbf{K_{neu}} - EMA_{alt}) + EMA_{alt}$$

$$EMA_{neu} = EMA_{alt} + a \cdot (\mathbf{K_{neu}} - EMA_{alt})$$

Diese 2 Formeln findet man manchmal, wobei ich die ursprüngliche Formel trotz komplizierterem Aussehen einleuchtender finde.

Wenn n .. Anzahl der Tage

Dann wird der Parameter a wird meist grob mit folgender Formel berechnet:

$$a = \frac{2}{1 + n}$$

Wobei, wie leicht einzusehen ist, der Zeitraum n nicht wirklich etwas mit einem "Zeitraum" zu tun hat.

Je größer aber n gewählt wird, desto kleiner wird a.
Da die Gewichtungsparameter mit größerem n also nur allmählich gesenkt werden, erhalten auch noch sehr alte Kurse einen Einfluss auf die Berechnung.
Es ist anzumerken, dass insbesondere bei klein gewählten n nicht alle Prozentwerte von a "getroffen" werden können und sehr große Sprünge zwischen zwei unterschiedlichen Einstellungen entstehen.

Früher nahm man auch manchmal $a = \frac{1}{n}$

Mit der neuen Berechnungsmethode wurde das Problem leicht verbessert.

es ergibt sich die Formel:

$$\boxed{EMA_{neu} = EMA_{alt} + \frac{2}{1 + n} \cdot (K_{neu} - EMA_{alt})}$$

In unserem Beispiel entsprach a = 0,34 ungefähr einem üblichen EMA über 5 Tage.

$$a = \frac{2}{1 + 5} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$$

Bei n = 6 käme man auf einen Paramter a = 0,29

Die Werte zwischen 29 bis 33 Prozent werden niemals getroffen.